Un modelo analógico como marco experimental para el movimiento browniano en la enseñanza media

JAVIER E. VIAU
LUCRECIA E. MORO
RAÚL O. ZAMORANO
ESTEBAN SZIGETY
Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina

Introducción

La Física emplea un tratamiento de tipo estadístico cuando se trata de analizar sistemas que están compuestos por un gran número de elementos minúsculos, ante la imposibilidad de estudiar sistemáticamente las trayectorias de las partículas. Así, la Mecánica Clásica deriva en lo que conocemos como Mecánica Estadística, que es, simplemente, la aplicación de la estadística al tratamiento de grandes poblaciones en el campo de la Mecánica en lo que concierne al movimiento de partículas u objetos cualesquiera sometidos a interacciones. Suministra, por tanto, una base de relación de las propiedades microscópicas de los átomos y moléculas individuales con las propiedades macroscópicas de los cuerpos.

Al abordar temas de mecánica estadística en al aula de Física, el docente se enfrenta con la existencia de una problemática educativa, que tiene su raíz en la falta de conocimiento de conceptos estadísticos por parte de los alumnos. Esta limitación pone en relieve la dificultad respecto de la profundidad con que se aborda el estudio de los conceptos termodinámicos y no permite que los alumnos conceptualicen la correspondencia entre el modelo macroscópico de las leyes de la termodinámica y el modelo cinético molecular de la materia.

En este trabajo proponemos una actividad experimental, que basada en una analogía didáctica, puede ser desarrollada en el aula con el objetivo de que los alumnos tengan acceso a los conocimientos estadísticos necesarios para interpretar el movimiento Browniano.

Marco teórico

Al estudiar sistemas compuestos por un número muy grande de componentes atómicos, la Física abandona el proyecto de analizar detalladamente trayectorias o estados cuánticos, y lo substituye por un tratamiento estadístico. Durante el pasaje de la mecánica clásica a la mecánica estadística, que se realiza durante la segunda mitad del siglo XIX, los esquemas basados en probabilidades prevalecen sobre los

Revista Iberoamericana de Educación
ISSN: 1681-5653
n.º 48/1 – 15 de diciembre de 2008
EDITA: Organización de Estados Iberoamericanos
para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI)

conceptos de órbitas exactamente prescriptas. Maxwell introduce el nombre mecánica estadística en 1879 y la probabilidad comienza a reemplazar a la certeza. Sin embargo, paradójicamente, es justamente el enorme número de elementos microscópicos que componen los materiales el que permite resultados estadísticos de gran precisión y confiabilidad.

El darse cuenta de la imposibilidad de una descripción detallada, determinista, de un sistema macroscópico, abre las puertas para otras descripciones más útiles y, quizás, con más poder de predicción efectivo. Einstein, en uno de los artículos de su "annus mirabilis" de 1905 introdujo una de tales descripciones para tratar el problema del llamado movimiento browniano, un problema que durante muchas décadas había permanecido sin resolver.

Robert Brown fue un botánico escocés que, a principios del siglo XIX, estaba estudiando la polinización de un cierto tipo de planta, *Clarkia pulchella*, para lo cual observaba bajo el microscopio una suspensión de granos de polen en agua. Observó que había unas pequeñas partículas alrededor de los granos que estaban en constante e irregular movimiento, y se propuso describir hasta que punto este movimiento que veía en el microscopio era atribuible a alguna propiedad del polen o a algo más general. Preparó suspensiones de diversas sustancias finamente pulverizadas en agua y otros líquidos y comprobó que, en todas ellas, podía observar ese incesante movimiento cuyo origen no supo explicar.

Debido a la realidad que presentan los alumnos de enseñanza media frente a la posibilidad de incorporar conceptos estadísticos, las estrategias didácticas que vayan a ser elaboradas en torno a la enseñanza de la Estadística no pueden ser concebidas dentro de un marco rígido sino que deben estar libres a la creatividad, donde tanto docentes como estudiantes fomenten su capacidad creadora y espíritu crítico. Si bien la estadística, en la actualidad, es parte del currículo de matemáticas en la educación primaria y secundaria de muchos países, los alumnos llegan a los niveles superiores con serias dificultades en su aplicación o, en la mayoría de los casos, sin el conocimiento de los conceptos básicos que la sustenta (Meletiou, 2003).

Las razones para incluir la enseñanza de la estadística en estos niveles se ha subrayado repetidamente durante los últimos veinte años (Holmes, 1980; Hawkins, Jolliffe, y Glickman, 1991; Wild y Pfannkuch, 1999; Gal, 2002), basadas en la utilidad de la estadística y probabilidad en la vida diaria, su papel instrumental en otras disciplinas, la necesidad de un conocimiento estocástico básico en muchas profesiones y el importante papel de la estadística en el desarrollo de un razonamiento crítico.

Los alumnos no consiguen responder satisfactoriamente situaciones problemáticas relacionadas con los conceptos de calor, trabajo, energía interna y temperatura, vinculados con la Primera Ley de la Termodinámica, aún después de haber recibido un entrenamiento importante en ello. Esas dificultades parecen residir en la falta de correspondencia entre el modelo macroscópico de las leyes de la termodinámica, (relaciones de energía que emplean magnitudes fenomenológicas) y el modelo cinético molecular de la materia. Ambos modelos teoréticos, uno macroscópico y otro microscópico se plantean habitualmente en la clase, de modo que esta falta de conexión sería en parte proveniente de la instrucción. El abordar temas de mecánica estadística en al aula de Física, en este caso bajo una actividad que deriva de una analogía didáctica, permite conceptualizar adecuadamente al modelo microscópico, así como dar un marco introductorio a la irreversiblidad mecánica que los introduce en el segundo principio de la termodinámica.

Metodología

Participantes

La propuesta que presentamos fue puesta en práctica en 2.° año de una Escuela Polimodal con orientación en Ciencias Naturales de la ciudad de Mar del Plata. Participaron 22 alumnos de 16 años de edad.

Diseño y aplicación de la propuesta

Esta propuesta se basa en presentar a la Estadística contextualizada dentro de un juego, en este caso sustentado por la aplicación de un modelo didáctico analógico. De esta manera, se le presentará a los alumnos la estadística como un conjunto de herramientas (métodos y técnicas) disponibles para la producción de conocimiento e información de su campo disciplinar específico.

Han guiado el diseño de esta propuesta los siguientes aspectos:

- *La Motivación:* porque pone a los alumnos en situación de "científicos" y/o "profesionales" y además, porque los pone en contacto con problemas cercanos a su realidad.
- *La integración:* porque permite trabajar relacionando y vinculando la física con la matemática.
- *La orientación:* porque será el hilo conductor que guiará la presentación y tratamiento de los temas teóricos y prácticos de los conceptos a desarrollar.

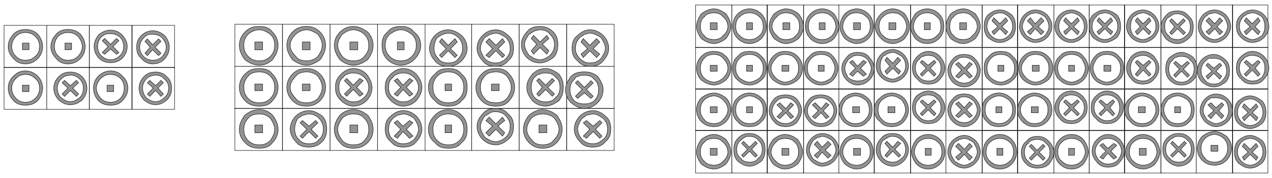
a) INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

Esta fase se plantea con el objetivo de que los alumnos reconozcan aquellos problemas que puedan requerir una solución de tipo estadístico. Pensamos que, de esta forma, podrán entender que la Estadística se basa en técnicas y herramientas que se justifican y son reconocidas por su capacidad de resolver problemas concretos de trabajo.

Los alumnos poseen diferentes ideas previas acerca del cálculo de probabilidades en situaciones simples, sin embargo desconocen los alcances de su aplicación en situaciones relacionadas con un número muy grande de eventos. El problema más sencillo del cálculo de probabilidades se presenta cuando se lanza al aire una moneda. Todos sabemos que es igual la probabilidad de que la moneda caiga cara o cruz. Pero ¿cuál será la situación si se deja caer consecutivamente la moneda dos veces seguidas, o lo que es lo mismo, si se dejan caer dos monedas simultáneamente? En la Figura 1 se muestran los gráficos que utilizamos en el aula, a modo de imagen, a los efectos de construir en el alumno la idea de repetición de eventos equiprobables.

FIGURA 1[1]

Distribución de caras y secas al arrojar 2, 3 y 4 monedas

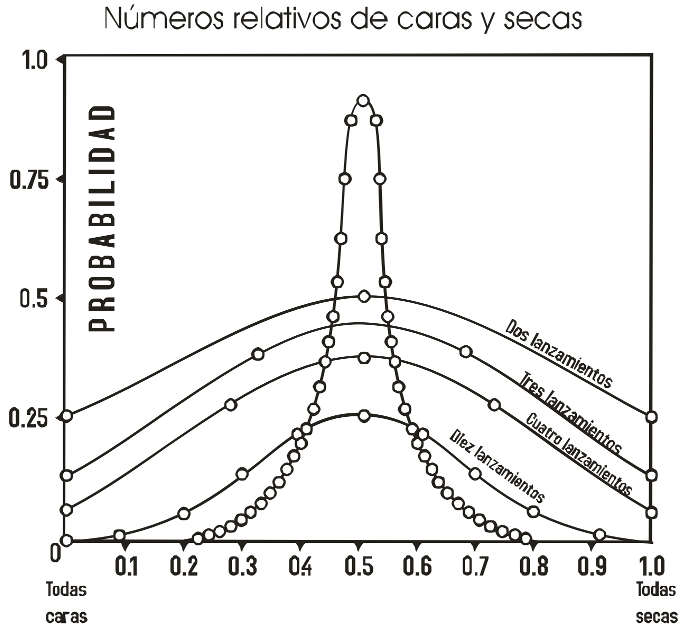


Este juego con monedas, particularmente sencillo, permite no sólo abordar las simples leyes del cálculo de probabilidades sino que proporciona un buen ejemplo de lo que se entiende al decir que las leyes de la probabilidad se hacen más exactas a medida que aumenta el número de ensayos. Luego se invita a los alumnos a construir el gráfico que muestra la Figura 2 a partir de la experiencia con lanzamientos, que representa las probabilidades de obtener números diferentes de caras y cruces para dos, tres, cuatro y un centenar de ensayos.

Este gráfico, realizado por los alumnos, permite visualizar como a medida que aumenta el número de pruebas se hace cada vez más nítida la curva de la probabilidad, mostrando claramente un valor máximo para número iguales de caras y cruces, el que se hace cada vez más pronunciado.

FIGURA 2[1]

Probabilidad de distribución de caras y secas



[1] Extraído de: GAMOW, G. (1948): *Uno dos tres infinito.* Buenos Aires: Espasa-Calpe.

b) PRESENTACIÓN DE UN MODELO ANALÓGICO DEL MOVIMIENTO BROWNIANO: EL PASEO DEL BORRACHÍN (GAMOW, 1948).

Una vez introducido el concepto de cálculo de probabilidades, planteamos en el aula el siguiente problema: imaginemos a un borracho que, apoyado sobre un farol decide comenzar a caminar y desplazarse. Una dramatización áulica por parte de los alumnos puede acompañar esta instancia de la clase a los efectos de lograr mayor claridad en el planteo. La pregunta a instaurar en el aula es: ¿a qué distancia del farol se encontrará el borracho luego de dar por ejemplo 100 pasos, imaginando que cada paso tiene una longitud promedio de 1 metro? Al principio se podría pensar que, a causa de la imprevisibilidad de cada cambio de dirección, no hay manera de contestar a esta pregunta.

Lo que se busca con esta etapa es despertar la motivación y el interés por parte de los alumnos, de modo de abordar el problema planteado con un lenguaje matemático adecuado.

Esta instancia se desarrolla dentro del marco teórico correspondiente, la idea de que cada paso puede pensarse como un vector, en donde la dirección y sentido son totalmente aleatorias y equiprobables, al igual que el arrojar una moneda al aire, pero con infinitas direcciones y sentidos posibles. Un gráfico de los pasos representado por vectores permite geométricamente visualizar, por parte del alumno, la necesidad de realizar una suma vectorial de 100 vectores, es decir, sumar componente a componente, 100 componentes X y 100 componentes Y. La imagen que crea un gráfico vectorial de este tipo, como muestra la Figura 3, construye en el alumno una analogía con una sumatoria de fuerzas clásica de su paso por dinámica, y fortalece la idea de lograr una formulación matemática adecuada de la problemática planteada.

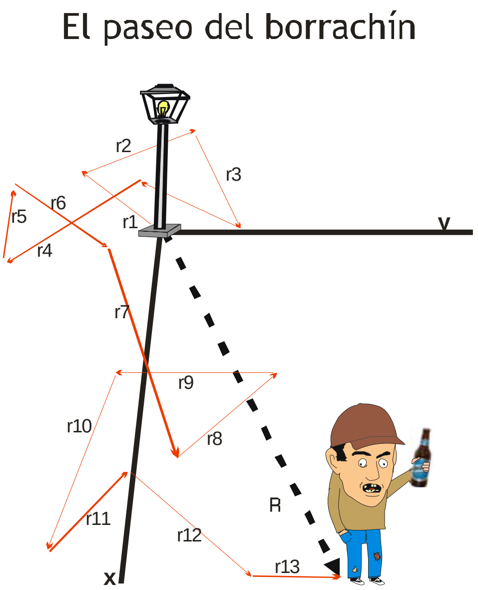
La formulación matemática, para n pasos, lleva a la siguiente expresión para la distancia final:

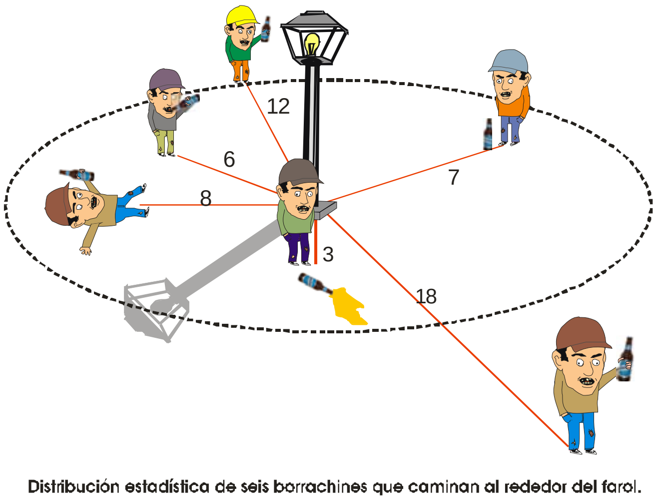
$$R = \sqrt{N} \bullet Lmed \tag{1}$$

Este resultado significa: La distancia más probable del borrachín al farol después de un número grande de pasos irregulares en su caminata, es igual a la longitud media de los trayectos rectos que camina, por la raíz cuadrada de su número.

FIGURA 3[2]
Caminata del borrachín

FIGURA 4[2]
Distribución estadística de 6 borrachines





Dentro de los comentarios que genera el resultado obtenido mediante la matematización de la problemática, se encuentra el hecho de que si el borracho da un paso promedio de 1 metro, antes de cambiar de dirección, lo más probable será encontrarlo a 10 metros del farol después de una caminata de 100 pasos. Aquí es donde entra en juego la naturaleza estadística del problema. Esto no significa que no exista una probabilidad de encontrarlo a 100 metros si todos los pasos los hubiera dado en la misma dirección y sentido, como tampoco significa que no exista una igual probabilidad de encontrarlo en el mismo farol. Simplemente significa que, habiendo un gran número de caminatas, o de borrachines, encontraremos que los mismos están desparramados de tal forma que la distancia promedio al farol es de 10 metros.

Cuanto mayor sea el número de borrachines, y mayor el número de cambios de dirección en sus paseos desordenados, más exacta es la regla. La figura 4 muestra esta situación para seis borrachines que caminan. Si se sustituyen los borrachines por algunos cuerpos microscópicos, tales como las esporas vegetales o las bacterias suspendidas en un líquido, se tendrá exactamente el cuadro que el botánico Brown vio con su microscopio. Si bien, las esporas y las bacterias no están borrachas, pero, como hemos dicho antes, son golpeadas sin cesar en todas las direcciones posibles por las moléculas que las rodean implicadas en el movimiento térmico, se ven obligadas a seguir trayectorias irregulares en zigzag.

[2] Caricaturización realizada por los alumnos de figuras extraídas de GAMOW, G. (1948): *Uno dos tres infinito*. Buenos Aires: Espasa-Calpe.

Si se observa a través de un microscopio el movimiento browniano de un gran número de pequeñas partículas suspendidas en una gota de agua, y si se fija la atención sobre un cierto grupo de ellas concentradas en una pequeña región dada, se notará que en el transcurso del tiempo se dispersan gradualmente por todo el campo visual, y que su distancia media desde el origen aumenta en proporción a la raíz cuadrada del intervalo de tiempo, tal como lo requiere la ley matemática por la cuál se calcula la distancia del paseo del borrachín.

c) IMPLEMENTACIÓN EN EL AULA

En el aula nos propusimos representar esta analogía presentada por Gamow mediante dispositivos sencillos ideados por los alumnos que simularan la aleatoriedad de la caminata del borracho. Se pensó en dar 8 direcciones posibles a la misma, ansimilándolas a las siguientes direcciones geográficas: N, S, E, O, NE, NO, SE, SO. Se propuso a los alumnos que construyeran algún dispositivo o idearan algún método de obtener estas 8 alternativas en forma equiprobable. Esta propuesta estuvo fundada en mostrar un suceso aleatorio diferente a lo que puede ser una simple moneda. Con el dispositivo ideado, los alumnos fueron instruidos para representar en un papel milimetrado el resultado de representar 100 pasos del borrachín. Cada paso fue equiparado a un vector de 1 cm (longitud media del paso) y con la dirección y sentido obtenidas de 100 ensayos del dispositivo propuesto. Así, los alumnos obtuvieron un gráfico característico de un movimiento Browniano, observando la aleatoridad de la caminata a lo largo de los sucesivos ensayos.

Con los gráficos obtenidos, se sugirió a los alumnos que realizaran al menos 3 caminatas, y registraran las distintas posiciones para 20, 40, 60, 80 y 100 pasos. La idea fue que, con las caminatas de 100 pasos realizadas por cada alumno del aula (22 caminatas), se realizara un diagrama similar al de la Figura 3, en donde se pudiera visualizar la distribución de los distintos borrachos luego de sus caminatas.

La actividad fue organizada según los siguientes pasos experimentales:

- PASO 1

  Seleccionar varios mecanismos o métodos en los cuáles se puedan obtener equi-probablemente ocho eventos (dado, ruleta, bolillero). A cada evento se le asignará una dirección: norte (N), noreste (NE), noroeste (NO), sur (S), sudeste (SE), sudoeste (SO), este (E) y oeste (O).

- PASO 2

  Realizar cien "ensayos" (pasos) por cada método seleccionado, registrando en una tabla los resultados obtenidos. Repetir al menos tres veces con cada mecanismo.

- PASO 3:

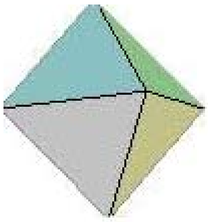
  Graficar los cien pasos del borrachín considerando cada paso como un vector de 1 cm de longitud, orientado según indique el ensayo correspondiente. Luego calcular la distancia desde el punto de partida hasta la posición final.

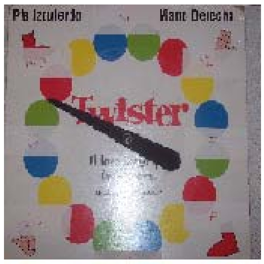
- PASO 4

  Comparar los resultados obtenidos por este método estadístico (haciendo un promedio de todas las distancias) con los resultados obtenidos por la ecuación matemática.

Resultados

PASO 1: Métodos utilizados





MÉTODO 1: dado de 8 caras

MÉTODO 2: ruleta

MÉTODO 3: bolillero

PASO 2

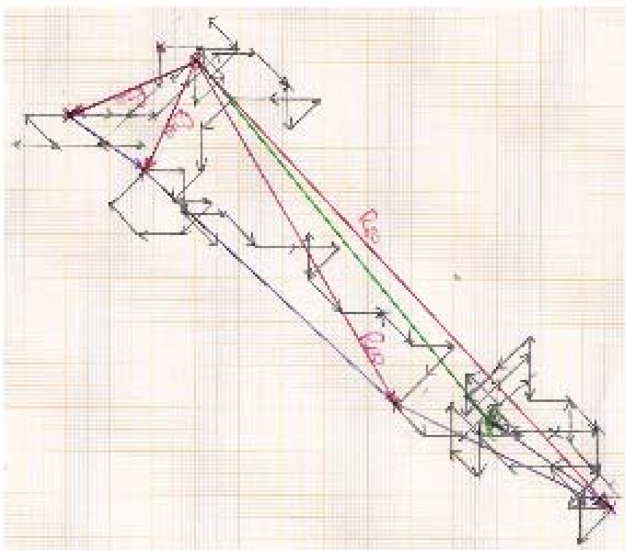
TABLA 1
Distancias recorridas por los caminantes a los 20, 40, 60, 80 y 100 pasos

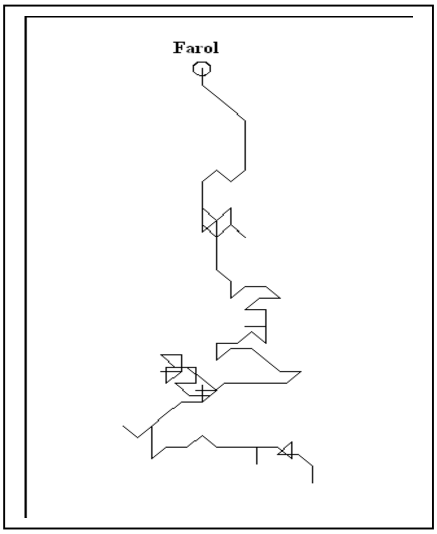
CAMINATA	MÉTODO	DISTANCIA (cm)				
		20 pasos	**40 pasos**	**60 pasos**	**80 pasos**	**100 pasos**
A	1	3,2	2,9	9,3	14,2	11,4
B	1	3,9	5,3	7,6	5,1	12,1
C	1	6,3	7,4	3,5	8,3	6,9
D	2	2,4	3,8	6,3	10,4	15,9
E	2	3,6	5,9	3,5	2,1	3,4
F	2	9,5	13,2	14,1	14,0	14,4
G	3	3,9	1,3	6,0	8,4	8,7
H	3	3,1	6,5	6,1	10,9	9,7
I	3	3,9	6,3	4,4	8,1	5,5

PASO 3

GRÁFICO 1

Posición final de cada borrachín alcanzada luego de 100 pasos





PASO 4

Tabla 2

Comparación entre la posición teórica y posición experimental obtenidas

N° de pasos	Posición teórica ($R = \sqrt{N} \cdot$ longitud del paso)	Posición experimental (promedio de las distancias)
20	$\sqrt{20} = 4,47$	4,42
40	$\sqrt{40} = 6,32$	5,84
60	$\sqrt{60} = 7,75$	6,75
80	$\sqrt{80} = 8,94$	9,05
100	$\sqrt{100} = 10,00$	9,78

Conclusiones obtenidas por los alumnos

- Pudimos comprobar que la ecuación matemática sobre la distancia "más probable" es totalmente correcta, puesto que el resultado obtenido siguiendo el método experimental (9,8 cm) se asemeja bastante al obtenido a través del método teórico (10 cm).

- En la tabla 2 se puede observar la proximidad entre los valores teóricos y los experimentales para distintos números de pasos.

- En el gráfico 1 se observa que las distintas caminatas dan a veces mayor o menor que la distancia más probable (10 cm). Sin embargo, el promedio simple de los 100 pasos nos da un valor relativamente cercano al esperado. Esto es que hay una leve diferencia entre la teoría y la práctica, para ello tendría que haber hecho más caminatas. En la medida que representamos más paseos de borrachín, nuestro resultado se acercará más a la medida teórica.

- Como todo fenómeno probabilístico la ley teórica se verá corroborada con un universo de medidas mucho mayor. En el interior de la materia el comportamiento de los átomos es aleatorio, por lo tanto, el "bombardeo" térmico que sufre una partícula de polen le permite realizar una infinita cantidad de pasos en un tiempo corto.

- Nuestro borrachín es una analogía de lo que ocurre en el interior de la materia y un acercamiento al movimiento browniano.

Consideraciones finales

El abordar temas que involucran a la teoría cinética de la materia, permite llevar al aula el verdadero trasfondo filosófico de la naturaleza, que nos permite explicar todos los fenómenos como la interacción de partículas materiales. Sería un grave error pensar que, a causa de la irregularidad del movimiento térmico, éste debe quedar fuera del plan de una descripción física posible.

La explicación del fenómeno, junto con la dramatización del borrachín, trajeron al aula preguntas que los alumnos fueron elaborando en la medida que la conceptualizacion del fenómeno estudiado despertaba su interés. Algunos se preguntaban ¿dependerá el fenómeno del tipo de gránulos de polen utilizados en la observación? ¿se podrá con el análisis físico de este movimiento encontrar la masa de las moléculas y/o partículas del seno del fluido, haciendo uso de los conceptos estudiados de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas?

Este ejemplo permite instaurar en el aula la idea de que el mundo real evoluciona y como se relacionan las probabilidades con esta evolución. Nos muestra una tendencia unidireccional hacia las configuraciones más probables, lo que nos introduce en la esencia de la irreversibilidad que es la base para la segunda ley de la termodinámica (Einstein e Infeld, 1993).

Bibliografía

EINSTEIN, A., e INFELD, L. (1993): *La evolución de la física*. Barcelona. Salvat Editores.

GAL, I. (2002): "Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities", en: *International Statistical Review*, 70 (1), pp. 1-25.

GAMOW, G. (1948): U*no dos tres infinito*. Espasa – Calpe. Buenos Aires.

HAWKINS, A.; JOLLIFFE, F., y GLICKMAN, L. (1991): *Teaching statistical concepts*. London. Longman.

HOLMES, P. (1980): "Teaching Statistics", en: *Sloug: Foulsham Educational*, pp. 11-16.

MELETIOU, M. (2003): "On the formalist view of mathematics: impact on statistics instruction and learning", en: MARIOTTI, A. (Ed.): *Proceedings of Third European Conference in Mathematics Education.* Bellaria, Italy: European Research in Mathematics Education Society. Recuperado10 de Junio, 2007 de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings.

WILD, C., y PFANNKUCH, M. (1999): "Statistical thinking in empirical enquiry", en: *International Statistical Review*, 67 (3), pp. 221-248.